

اصل شمارش: اگر عملی به n روش و عمل دیگری به m روش قابل انجام باشد آنگاه هر دو عمل با هم به $m \times n$ روش قابل انجام هستند.

مثال: از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به مجموعه $B = \{a, b, c, d\}$

الف) چند تابع می توان نوشت.

ب) چند تابع یک به یک می توان نوشت.

نکته:

مثال: ۴ مهره قرمز و سه مهره آبی را به چند طریق می توان در یک ردیف چید به گونه ای که دو مهره هم رنگ کنار هم نباشند؟

$$0! = 1$$

تعریف:

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

$$\text{مثلا: } 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

نکته: از $5!$ به بعد رقم یکان صفر است.

مسئله: رقم یکان عدد $\sum_{n=1}^{1394} (n!)^2$ کدام است؟

مسئله: عدد $14!$ به چند صفر ختم می شود؟

نکته:

جایگشت: در جایگشت ترتیب مهم است مانند: کلمه نویسی و بردار و صف ایستادن و چیدن کنار هم و عدد نویسی و

انتخاب افراد همراه با پست و مقام

نکته: برای حل مسائل جایگشت از اصل شمارش استفاده می کنیم.

ترکیب: در ترکیب ترتیب مهم نیست مانند: پاره خط چند ضلعی و انتخاب بدون پست و مقام و زیر مجموعه نویسی

در مسائل ترکیب از فرمول $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ استفاده می کنیم.

نکته:

نکته: اگر m شی داشته باشیم که n_1 تای آنها از نوع اول و n_2 تای آنها از نوع دوم و ... و n_k آنها از نوع k ام باشند

آنگاه تعداد جایگشت ها برابر است با:

$$\frac{m!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

مثال: با حروف کلمه بلبل چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت؟

نکته: تعداد روش هایی که n نفر می توانند در یک صف بایستند $n!$ است.

نکته: تعداد روش هایی که n نفر می توانند دور یک میز قرار گیرند برابر است با $(n-1)!$

مثال: سه نفر a و b و c به چند روش می توانند دور یک میز قرار گیرند؟

مسائل:

(۱) هفت نقطه روی دایره مفروض هستند.

(الف) چند بردار می توان نوشت؟

(ب) چند بردار غیر صفر می توان نوشت؟

(ج) چند پاره خط داریم؟

(د) چند مثلث می توان نوشت؟

۲) مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ مفروض است.

الف) چند زیر مجموعه دارد؟

ب) چند زیر مجموعه سه عضوی دارد؟

ج) چند زیر مجموعه سه عضوی دارد که شامل a باشد؟

د) چند زیر مجموعه سه عضوی دارد که شامل a نباشد؟

ه) چند زیر مجموعه ۴ عضوی دارد که شامل a باشد و شامل b نباشد؟

۳) اگر $\frac{p(n, 4)}{c(n-1, 4)} = 26$ مقدار n را بیابید.

۴) اگر $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 63$ مقدار n را بیابید.

۵) تعداد جایگشت های حروف کلمه SYSTEM را بیابید به طوری که S ها کنار هم نباشند. (جواب ۲۴۰)

۶) از میان ۵ مرد و سه زن به چند روش می توان یک گروه ۴ نفره تشکیل داد به گونه ای که:

الف) همگی مرد باشند.

ب) ۲ مرد و ۲ زن باشند.

ج) حداقل یکی مرد باشد.

۷) با رقم های ۴ و ۴ و ۴ و ۴ و ۰ و ۰ و ۰ چند کد ۸ رقمی می توان نوشت؟

الف) چند عدد ۸ رقمی می توان نوشت؟

ب) چند عدد ۸ رقمی می توان نوشت که مضر ۵ نباشد؟

۸) از پنج دبیرستان A و B و C و D و E از هر کدام ۴ دانشآموز انتخاب می کنیم. به چند طریق می توان از میان آنها ۳

دانش آموز انتخاب کرد به گونه ای که از یک مدرسه نباشند؟

۹) با حروف کلمه PANAMA چند جایگشت می توان نوشت که حروف A کنار هم نباشند؟

۱۰) چهار کتاب ریاضی و سه کتاب فیزیک را به چند طریق می توان کنار هم قرار داد به گونه ای که کتب فیزیک کنار هم نباشند؟

احتمال:

فضای نمونه: کلیه حالات که در یک پدیده تصادفی ممکن است رخ دهد و آنرا با S نشان می دهیم.

پیشامد: زیر مجموعه فضای نمونه ای

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

= احتمال رخ دادن A

مسائل:

۱) خانواده ای دارای دو فرزند است. می دانیم یکی از آنها پسر است از دیگری خبر نداریم احتمال آنکه فرزند دیگر دختر باشد را بیابید.

۲) خانواده ای دارای دو فرزند است. اگر فرزند اول پسر باشد احتمال آنکه فرزند دوم دختر باشد را بیابید.

۳) دو تاس را پرتاب می کنیم جدول زیر را کامل کنید.

۴) دو تاس را می اندازیم احتمال آنکه مجموع اعداد آمده اول باشد را بیابید.

۵) دو تاس را می اندازیم احتمال آنکه حاصل ضرب اعداد آمده کمتر از ۳۰ باشد.

۶) اعداد ۱ تا ۶ را روی ۶ گوی می نویسیم سپس دو گوی را انتخاب می کنیم احتمال آنکه مجموع این گوی ها مضرب ۳ باشد.

۷) سه تاس را می اندازیم احتمال آنکه اعداد آمده دنباله حسابی با قدر نسبت یک تشکیل دهند را بیابید.

۸) از میان ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه سه موش انتخاب می کنیم. احتمال آنکه هر سه موش سفید باشند.

قوانین احتمال:

$$P(S) = ۱ \text{ و } P(\emptyset) = ۰ \quad (۱)$$

$$۰ \leq P(A) \leq ۱ \quad (۲)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{اگر } A \text{ و } B \text{ ناسازگار باشند} \quad (۳)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (۴)$$

$$P(A') = ۱ - P(A) \quad (۵)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad \text{اگر } A \text{ و } B \text{ مستقل باشند} \quad (۶)$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \quad (۷)$$

۸) احتمال شرطی

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \text{احتمال } A \text{ به شرط آنکه بدانیم } B \text{ رخ داده است.}$$

۹) قانون احتمال کل:

اگر $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = S$ و E_i ها دو به دو ناسازگار باشند داریم:

$$P(E) = \sum_{i=1}^n P(E_i)P(E|E_i)$$

مسائل:

۱) اگر A و B ناسازگار باشند و $P(A) = ۰/۲$ و $P(B) = ۰/۳$ حاصل $P(A \cup B)$ را بیابید.

۲) اگر A و B مستقل باشند و $P(A) = 0.2$ و $P(B) = 0.3$ حاصل $P(A \cup B)$ را بیابید.

۳) احتمال آمدن به نیامدن باران $\frac{2}{3}$ می باشد احتمال آنرا بیابید که باران ببارد.

۴) اگر $P(A) = 2P(B) = 3P(A \cap B)$ حاصل

الف) $\frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)}$ را بیابید.

ب) $P(B|A) + P(A|B)$ را بیابید.

ج) $P(A|B')$ را بیابید.

۵) خانواده ای دارای ۳ فرزند است اگر A پیشامد آنکه دو فرزند اول پسر باشند و B پیشامد آنکه فرزند سوم دختر باشد و

C پیشامد آنکه دقیقا دو فرزند دختر باشند.

الف) آیا A و B مستقل هستند؟

ب) آیا B و C مستقل هستند؟

۶) در یک خانواده سه فرزندی فرزند اول دختر است. احتمال آنکه حداقل یکی از فرزندان پسر باشد.

۷) در پرتاب دو تاس می دانیم هر دو عدد فرد آمده اند. احتمال آنکه مجموع آنها ۷ باشد.

۸) تمرین صفحه ۹

۹) اگر $\frac{1}{4}$ ژن های تعیین کننده R_H خون منفی باشند.

الف) احتمال آنکه R_H خون فردی منفی باشد.

ب) منفی نباشد.

۱۰) در خانواده سه فرزند احتمال اینکه R_H خون هر سه یکی باشد.

۱۱) ۵۲ درصد جمعیت جامعه زن هستند. اگر ۸ درصد از زنان و ۱۰ درصد از مردان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند.

احتمال آنکه شخصی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد را بیابید.

۱۲) احتمال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۹ درصد و به دختر ۶ درصد است. با کدام احتمال فرزندى که به

دنیا می آید این بیماری را ندارد؟

۱۳) سه نفر را انتخاب می کنیم احتمال آنکه ماه تولد هر سه نفر یکسان باشد.

۱۴) ۵ جفت کفش متمایز داریم دو لنگه را شانسی انتخاب می کنیم، احتمال آنکه یک جفت باشند.

۱۵) در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه داریم. سه موش را انتخاب می کنیم، احتمال آنکه اولی سفید و سومی سیاه باشد.

۱۶) در مسئله قبل دو موش فرار کرده اند. حال یک موش انتخاب می کنیم احتمال آنکه سفید باشد.

۱۷) در کیسه ای ۴ مهره سفید و ۳ مهره قرمز داریم و در کیسه ی دومی ۵ مهره سفید و ۴ قرمز داریم یکی از کیسه ها را شانسی انتخاب کرده و مهره ای بیرون می آوریم احتمال آنکه قرمز باشد.

۱۸) در مسئله قبل از کیسه دوم مهره ای را بیرون می آوریم و در کیسه اول قرار می دهیم سپس از کیسه اول یک مهره بیرون می آوریم احتمال آنکه قرمز باشد.

۱۹) در مسئله ۱۷ از کیسه اول ۲ مهره و از کیسه دوم ۳ مهره بیرون می آوریم و در کیسه سومی قرار می دهیم سپس از کیسه سوم مهره ای بیرون می آوریم احتمال آنکه مهره قرمز باشد.

۲۰) سکه ای را می اندازیم اگر رو بیاید آنگاه تاس را می اندازیم و اگر پشت بیاید سکه را دو بار دیگر می اندازیم احتمال آنکه حداقل یک بار سکه رو بیاید.

(۲۱) از مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ عددی انتخاب می کنیم.

الف) احتمال آنکه عدد مضرب ۳ باشد.

ب) احتمال آنکه عدد مضرب ۵ باشد.

ج) احتمال آنکه عدد مضرب ۳ باشد ولی مضرب ۵ نباشد.

د) احتمال آنکه عدد هم مضرب ۳ باشد و هم مضرب ۵

ه) احتمال آنکه عدد یا مضرب ۳ باشد یا مضرب ۵

احتمال دو جمله ای:

اگر آزمایش فقط دو حالت داشته باشد (شکست یا پیروزی) و احتمال رخ دادن پیروزی P باشد آنگاه احتمال رخ دادن شکست $1 - P$ است. اگر این آزمایش را n بار تکرار کنیم احتمال رخ دادن k بار پیروزی از فرمول زیر بدست می آید:

$$P = \binom{n}{k} P^k (1 - P)^{n-k}$$

مسائل:

(۱) ۷۵ درصد محصولات کارخانه ای مرغوب هستند. از ۴ کالای خریداری شده احتمال آنکه:

الف) سه کالا مرغوب باشند.

ب) حداقل یک کالا مرغوب باشد.

(۲) تاسی را داریم که سه وجه آن قرمز و سه وجه دیگر آن آبی است. این تاس را ۵ دفعه می اندازیم احتمال آنکه ۳ بار

قرمز بیاید.

۳) در یک بیمارستان ۵ نوزاد در یک روز متولد می شوند. با کدام احتمال حداقل سه فرزند دختر هستند.

۴) از نوعی بذر ۸۰ درصد جوانه می زند از سه بذر کاشته شده با کدام احتمال حداقل دو بذر جوانه می زند.

۵) ده تست چهار گزینه ای را شانسی علامت زده ایم. احتمال اینکه به ۷ سوال پاسخ درست داده باشیم را بیابید.

جدول توزیع احتمال و تابع آن

نکته: در هر جدول احتمال مجموع احتمال ها یک است.

مسائل:

۱) در آزمایشگاهی ۶ موش سیاه و ۴ موش سفید داریم. ۲ موش فرار کرده اند اگر x تعداد موشهای سفید باشد جدول توزیع احتمال را تشکیل دهید.

۲) در جدول زیر ابتدا a را حساب کنید و سپس $P(x < 3)$

x	۰	۱	۲	۳
p	a	$4a$	$9a$	$16a$

۳) تاسی را آنقدر می اندازیم تا برای اولین بار ۶ بیاید جدول توزیع احتمال و تابع احتمال را بنویسید.

۴) در پرتاب دو تاس متغیر x مجموع اعداد ظاهر شده در نظریه گیریم اگر تابع احتمال به صورت

$$f(x) = \frac{a-|x-7|}{36}$$
 باشد a را بیابید.

۵) یک عدد سه رقمی را شانسی انتخاب می کنیم احتمال آنکه آن عدد زوجی با رقم های متمایز باشد و فاقد رقم ۴ باشد.

۶) از میان ۵ زن و شوهر (۵ زوج) سه نفر را صدا می زنیم احتمال آنکه یک زوج انتخاب شده باشد.

۷) سکه ای را آنقدر پرتاب می کنیم تا برای اولین بار رو بیاید احتمال آنکه در پرتاب های با شماره زوج برای اولین بار رو بیاید.

۸) یک جفت تاس را آنقدر پرتاب می کنیم تا مجموع ۷ بیاید احتمال آنکه دقیقا دو پرتاب لازم باشد بیاید .

۹) در جعبه ای n لامپ داریم که سه تای آن خراب است. اگر احتمال اینکه ۲ لامپ انتخاب کنیم و هر دو معیوب باشند برابر $\frac{1}{7}$ باشد. تعداد کل لامپ ها را بیابید.

۱۰) درب ورودی منزل فردی دوقفل دارد که کلیدهایش در دسته کلید وی که ۵ کلید داشته قرار دارد اما یکی از آنها گم شده است چقدر احتمال دارد او بتواند درب را باز کند.

الف) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{2}{3}$ ج) $\frac{2}{5}$ د) $\frac{3}{5}$

۱۱) از میان ۱۰ نقطه زیر ۴ نقطه انتخاب می کنیم. احتمال آنکه این ۴ نقطه رئوس یک چهار ضلعی باشند که هر راس آن روی یکی از خطوط است را بیابید.

۱۲) سکه ای را هفت بار پرتاب کرده ایم در پرتاب هشتم برای سومین بار روی سکه ظاهر شده است. احتمال آنکه در

اولین پرتاب روی سکه ظاهر شده باشد. (جواب: $\frac{\binom{6}{1}}{\binom{7}{2}}$)

۱۳) اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{6}$ و $P(A|B) = \frac{1}{3}$ مقدار $P(A \cup B)$ را بیابید.

۱۴) یک سکه را حداقل چند بار پرتاب کنیم تا احتمال آمدن حداقل یک بار رو بیشتر از ۹۸ درصد باشد.

۱۵) تاسی را ۴ بار پرتاب می کنیم احتمال آنکه ۲ بار عدد ۳ ظاهر شود را بیابید. (احتمال دو جمله ای)

۱۶) تاسی را پرتاب می کنیم احتمال آنکه دو بار ۳ و دو بار ۶ و یک بار ۵ بیاید.

۱۷) دو نفر به نام های A و B به ترتیب هر کدام دو سکه می اندازند اولین کسی که هر دو سکه اش رو بیاید برنده است. احتمال برنده شدن A را بیابید.

۱۸) دو نفر A و B هر کدام تاسی را می اندازند اولین نفری که ۶ بیاورد برنده است. احتمال برنده شدن A را بیابید.

۱۹) تاسی را آنقدر می اندازیم تا برای اولین بار ۶ بیاید احتمال آنرا بیابید که تعداد پرتاب ها زوج باشد.

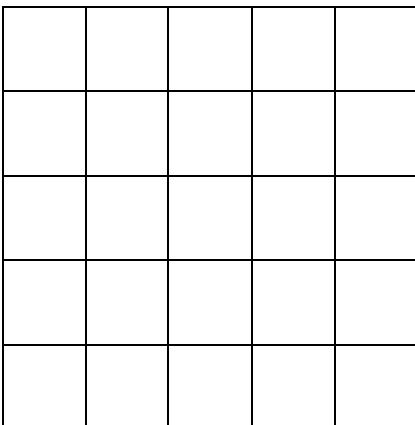
۲۰) خانواده A و B هر کدام سه فرزند دارند. احتمال آنکه تعداد دخترهای A بیشتر از B باشد.

۲۱) دو تاس را باهم می اندازیم تا برای اولین بار هر دو زوج بیایند. با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب حاصل می شود؟

۲۲) سه تاس می اندازیم. احتمال آنکه بزرگترین عدد آمده ۴ باشد.

۲۳) پنج نفر A و B و C و D و E در یک صف قرار می گیرند. احتمال آنکه A قبل از B و B قبل از C باشد.

۲۴) درون شکل زیر یک مستطیل انتخاب می کنیم احتمال آنکه مربع باشد.



۲۵) سکه ای را ۱۰ بار می اندازیم احتمال آنکه پنجمین رو در پرتاب دهم اتفاق بیافتد.

۲۶) احتمال اینکه شخصی تیری را به هدف بزند $\frac{1}{6}$ است. این شخص سکه ای را پرتاب می کند اگر رو بیاید ۵ بار تیر می اندازد و اگر پشت بیاید سه بار تیر می اندازد. احتمال آنکه فقط یک تیر به هدف برخورد کند.

۲۷) احتمال آنکه یک در باز باشد $\frac{1}{4}$ است کلید این در بین ۱۲ کلید موجود در یک قفسه است. شخصی دو کلید بر می دارد احتمال آنکه این شخص بتواند در را باز کند.

۲۸) ۴ کتاب ریاضی و ۳ کتاب فیزیک را به چند روش می توان در کنار هم چید به گونه ای که:
الف) کتاب ها یک در میان باشند.

ب) هیچ دو کتاب فیزیک در کنار هم نباشند.

ج) کتاب های فیزیک یک در میان باشند.

۲۹) تاسی را پرتاب می کنیم اگر زوج بیاید دو تاس دیگر می اندازیم و اگر فرد بیاید یک تاس دیگر می اندازیم. احتمال آنکه مجموع اعداد آمده ۷ باشد.

۳۰) ۹ نفر خواهان رفتن به مسافرت هستند. سه ماشین با ظرفیت های ۲ و ۴ و ۵ نفر در اختیار داریم. به چند طریق می توانند به مسافرت بروند به شرطی که از هر سه ماشین استفاده شود؟

۳۱) احتمال جوانه زدن دانه ای $\frac{3}{5}$ می باشد. بیست دانه می کاریم. احتمال اینکه چند دانه جوانه بزند حداکثر است؟

نکته: در احتمال دو جمله ای اگر آزمایش n بار تکرار شود و احتمال پیروزی p باشد تعداد پیروزی اه که حداکثر به دست

می آید برابر است با: $[(n + 1)p]$

۳۲) با رقم های ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ عددی شش رقمی ساخته ایم. احتمال آنکه صفر بین ۱ و ۴ باشد را بیابید.

۳۳) ۴ نفر گوشی هایشان را روی یک میز می گذارند سپس با چشمانی بسته یک گوشی را بر می دارند. احتمال آنکه:

الف) هر یک گوشی خودش را برداشته باشد.

ب) هیچکدام گوشی خودش را برنداشته باشد.

تابع درجه دوم (سهمی):

هر تابع به فرم $y = ax^2 + bx + c$ را سهمی گوئیم.

اگر a مثبت باشد سهمی دارای min است و اگر a منفی باشد سهمی دارای Max است

راس سهمی: برای محاسبه راس سهمی معادله $y' = 0$ را حل می کنیم یعنی

$$2ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

خط تقارن: خط $x = \frac{-b}{2a}$ خط تقارن سهمی است.

مثال: سهمی های زیر را رسم کنید:

$$1) y = 3x^2 + 6x$$

$$2) y = (2 - x)(4 + x)$$

$$3) y = 2x^2 + 3$$

مسائل:

(۱) کمترین مقدار تابع $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ را معین کرده و برد تابع را بنویسید.

(۲) حاصل جمع دو عدد ۴۰ می باشد دو عدد را بیابید که حاصل ضرب Max باشد.

(۳) محیط مستطیلی ۱۰۰ می باشد ابعاد مستطیل را بیابید که مساحت حداکثر باشد.

۴) با ۱۲۰ متر سیم خاردار زمینی را در کنار دریا محصور می کنیم ابعاد زمین را معین کنید که مساحت زمین حداکثر شود.

۵) هرگاه $2x + 3y = 10$ حداکثر xy را معین کنید.

۶) حاصل ضرب دو عدد مثبت ۹ می باشد. دو عدد را معین کنید که جمع آنها کمترین باشد.

۷) کمترین مقدار تابع $f(x) = x + \frac{4}{x}$ را به ازای x مثبت بیابید.

۸) معادله $h(t) = -5t^2 + 20t + 80$ مربوط به پرتاب توپ می باشد:

الف) ارتفاع اولیه توپ چند است؟

ب) سرعت اولیه پرتاب چند است؟

ج) توپ چند متر بالا می رود؟

د) توپ با چه سرعتی به زمین برخورد می کند؟

معادله درجه دوم

در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ داریم $\Delta = b^2 - 4ac$ و اگر

(۱) $\Delta < 0$ آنگاه معادله جواب ندارد.

(۲) $\Delta > 0$ آنگاه معادله دو جواب دارد.
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

(۳) $\Delta = 0$ معادله ریشه مضاعف دارد.
$$x = \frac{-b}{2a}$$

(۴) اگر ریشه های معادله درجه دوم را α و β فرض کنیم آنگاه $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

(۵) اگر بخواهیم معادله درجه دومی بنویسیم که ریشه های آن α و β باشند

$$\begin{aligned} S &= \alpha + \beta \\ P &= \alpha\beta \end{aligned} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

اثبات:

مسائل:

(۱) اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 6x + 1 = 0$ حاصل عبارات زیر را بیابید.

a) $\alpha + \beta$

b) $\alpha\beta$

c) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$

d) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

e) $\alpha^2 + \beta^2$

$$f) \alpha^x + \beta^x$$

$$g) \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$$

$$h) 2\alpha^x + 6x + 7$$

$$k) \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$

۲) در معادله $2x^2 - 5x + 2 = 0$ حاصل $\alpha^x + \frac{1}{\alpha^x} + \beta + \frac{1}{\beta}$ را بیابید.

۳) اگر مجموع ریشه های معادله $2x^2 - (m+1)x - 3x = 0$ برابر ۳ باشد حاصل ضرب ریشه ها را بیابید.

۴) در معادله $mx^2 - 3x + 1 - m = 0$ حاصل ضرب ریشه ها برابر -2 می باشد مجموع ریشه ها را بیابید.

۵) در معادله مسئله ی قبل اگر ریشه ها معکوس هم باشند مجموع ریشه ها را بیابید.

۶) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $2 + \sqrt{2}$ و $2 - \sqrt{2}$ باشد.

۷) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن مربع ریشه های معادله $x^2 + 2x - 5 = 0$ باشند.

۸) اگر ریشه های معادله $2x^2 + mx + 1 = 0$ به صورت $\sin \theta$ و $\cos \theta$ باشند m را بیابید.

۹) معادله سهمی بنویسید که محور طول ها را در ۲ و -۲ قطع کند و محور عرض ها را در ۲ قطع کند.

۱۰) ثابت کنید ریشه های معادلات $ax^2 + bx + c = 0$ و $cx^2 + bx + a = 0$ معکوس هم می باشند.

۱۱) خصوصیات سهمی بنویسید که از همه نواحی بگذرد ولی از ناحیه چهارم نگذرد.

۱۲) مجموع ریشه های معادله $(x^2 + 2)^2 - 18(x^2 + 2) + 72 = 0$ را بیابید.

۱۳) معادله $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ دو ریشه متمایز دارد حدود m را معین کنید.

۱۴) ریشه های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ از ریشه های معادله $3x^2 - 4x - 1 = 0$ یک واحد بیشتر است. b

کدام است؟

۱۵) در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ اگر بخواهیم یک ریشه k برابر دیگری باشد ثابت کنید:

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

تابع قدر مطلق

تعریف:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

اگر x یک عدد حقیقی باشد تعریف می کنیم:

$$|x| = \max\{-x \text{ و } x\} \text{ و یا}$$

مسائل:

توابع زیر را رسم کرده و برد تابع را بنویسید:

۱) $y = |x|$

۲) $y = |x - 2| + 3$

۳) $y = |x - 2| + |x + 2|$

۴) $y = |x - 2| - |x + 2|$

$$۵) y = |x - ۲| - x$$

$$۶) y = \max\{-x, x\}$$

$$۷) y = \min\{-x^r, x^r - ۱\}$$

رسم تابع $y = |f(x)|$:

مسائل:

رسم کنید:

$$۱) y = |\sin x|$$

$$۲) y = |x^r - ۱|$$

$$۳) y = |۲ - |x||$$

روش رسم $y = f(|x|)$:

مثال: رسم کنید: $y = \sin|x|$

خواص قدر مطلق:

$$۱) |x| = a \Rightarrow x = \pm a$$

$$۲) |x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$$

$$۳) |x| \geq a \Rightarrow x \geq a \text{ یا } x \leq -a$$

$$۴) |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$۵) |x|^r = x^r$$

$$۶) |x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$$

مسائل:

معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید:

$$۱) ||x - ۲| - ۴| = ۲$$

$$۲) \frac{1}{|x+5|} = ۲$$

$$۳) \frac{۳}{|x|} < ۱$$

$$۴) |2x - 1| = |x - 2|$$

مسئله: تابع $f(x) = |x - 2| + |x + 2|$ مفروض است.

الف) معادله $f(x) = 5$ چند جواب دارد.

ب) معادله $f(x) = 4$ چند جواب دارد.

مسئله: معادله $|2 \sin x| = x$ چند جواب دارد.

مسئله: معادله $(x - 1)^2 - 5|x - 1| + 4 = 0$ را حل کنید.

مسئله: نمودار $y = 4 - |x|$ در بازه (a, b) بالاتر از خط به معادله $y + x = 5$ قرار دارد بزرگترین مقدار $b - a$

a کدام است؟

معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) |x^3 - 1| + |x^2 - 1| + |x - 1| = 0$$

$$۲) |x^۲ - ۳x + ۲| + |-۲x + ۳x^۲ - x^۳| = ۰$$

$$۳) |x| + |x + ۱| = |۲x + ۱|$$

نکته: حل تست نامعادلات را به کمک گزینه ها جواب می دهیم.

مثال:

تابع جزء صحیح (براکت):

تعریف: اگر x عدد حقیقی باشد

$$x \text{ جزء صحیح } = [x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

مثال:

$$[۰/۳] =$$

$$[۳/۲] =$$

$$[-۳/۲] =$$

$$[-۰/۳] =$$

مسائل:

۱) حاصل $[\log_۶ ۲] + [\log_۲ ۶]$ بیابید .

۲) اگر $M = (1 + \sqrt{2})^۵ + (1 - \sqrt{2})^۵$ مقدار $[(1 + \sqrt{2})^۵]$ را برحسب M بیان کنید .

$$۱) [x] \in \mathbb{Z}$$

$$۲) n \leq x \leq n + ۱ \Leftrightarrow [x] = n$$

$$۳) x - ۱ < [x] \leq x$$

$$۴) [x] \leq x < [x] + ۱$$

$$۵) \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x + n] = [x] + n$$

$$۶) [x + y] = \begin{cases} [x] + [y] \\ [x] + [y] + ۱ \end{cases}$$

$$۷) [nx] = [x] \left[x + \frac{۱}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-۱}{n} \right]$$

$$۸) [x] + [-x] = \begin{cases} \cdot & x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

اثبات خاصیت ۶:

مثال: توابع زیر را رسم کنید.

$$۱) y = x - [x]$$

$$۲) y = (-۱)^{[x]}$$

$$۳) y = [x]$$

رسم تابع $[f(x)]$:

مسائل:

رسم کنید .

$$۱) y = [x^۲]$$

$$۲) y = [|x|]$$

$$۳) y = [\sin x]$$

معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) [x - ۳] = ۴$$

$$۲) [۱ - ۲x] = ۵$$

$$۳) \left[\frac{x+۱}{x} \right] = ۳$$

$$۴) [۳x + ۱] + [۳x - ۴] = ۷$$

اگر $n \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید.

$$\left[\frac{n}{۲} \right] + \left[\frac{n+۱}{۲} \right] = n$$

اگر $[x^۲ - ۴x] = n$ و $[x^۲ - ۱۲x] = n$ حاصل $[(x-۴)^۲]$ کدام است .

برد تابع $f(x) = [x + ۲] + [-x] + \left[\frac{۷x^۲ + ۱۳}{x^۲ + ۲} \right]$ را محاسبه کنید.

حاصل $[\sqrt{۴x^۲ + ۲x + ۱}]$ کدام است؟

الف) $۲n$ ب) $n + ۱$ ج) $۲n + ۱$

نمودار $y = 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$ در بازه $[-2.6]$ از چند پاره خط مساوی تشکیل شده است؟

نمودار $y = x - [x]$ در بازه $[-2.3]$ از چند پاره خط و با چه طولی تشکیل شده است .

$$f(x) = \begin{cases} |x - [x]| & \text{زوج } [x] \\ |x - [x + 1]| & \text{فرد } [x] \end{cases} \text{ تابع را رسم کنید.}$$

تابع $y = [x^2 + 2x]$ را رسم کنید.

توابع صعودی و نزولی:

تعریف: تابع $y = f(x)$ صعودی است هرگاه :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

و نزولی گوئیم هرگاه :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

مسئله: تابع اکیدا صعودی و اکیدا نزولی را تعریف کنید و توضیح دهید از روی نمودار تابع چگونه می توان صعودی

و نزولی بودن را معین کرد.

مسئله: توابع زیر را رسم کنید و صعودی و نزولی بودن آنها را معین کنید.

۱) $y = 2^{-|x|}$

۲) $y = |\sin x|$

۳) $y = \frac{1}{x}$

ترکیب توابع: می دانیم

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

و

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$$

مسئله: اگر $x \rightarrow 2$ \rightarrow \boxed{g} \rightarrow \boxed{f} و $g(x) = 3x + 4$ مقدار $f(5)$ بیابید.

مسئله: اگر $f(x) = 2x + 5$ و $g = \{(2, 3)(4, 7)(3, 1)\}$ توابع زیر را بنویسید.

$g \circ g =$

$$f \circ g =$$

$$g \circ f =$$

$$f \circ f =$$

مسئله: اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $y(x) = \sin^f x$ تابع $f \circ g$ را ساده کنید.

تابع یک به یک:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \quad \text{تابع } y = f(x) \text{ یک به یک است هرگاه:}$$

معکوس تابع:

اگر f و g دو تابع باشند که $f \circ g(x) = x$ و $g \circ f(x) = x$ آنگاه می‌گوئیم f و g معکوس هم هستند و معکوس

f را به f^{-1} نشان می‌دهیم و توابع یک به یک معکوس پذیرند.

مسائل:

ثابت کنید توابع زیر معکوس پذیرند و معکوس آنها را حساب کنید.

$$۱) f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$$

$$۲) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$۳) f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$$

$$۴) f(x) = x + [x]$$

۵) وارون تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases}$ را بنویسید.

۶) دامنه تابع $y = x^2 + 2x$ را محدود کنید که تابع وارون پذیر باشد سپس وارون آن را بنویسید.

۷) آیا $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ چرا؟

۸) تابع $y = x + [x]$ و معکوس آن در چه نقاطی مقاطع هستند.

۹) هرگاه $f(x) = f(2-x)$ و معادله $f(x) = 0$ دارای ۶ ریشه باشد مجموع ریشه ها را بیابید.

۱۰) اگر $f(2-x) + 2x(x+2) = 3x$ تابع $f(x)$ را بیابید.

۱۱) ثابت کنید تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ x + 1 & x < 0 \end{cases}$ یک به یک است و معکوس آنرا بیابید.

دنباله‌ها:

مسائل:

۱) اگر $a_n = \frac{5n+17}{n+1}$ جمله عمومی دنباله باشد.

الف) دو جمله اول بنویسید.

ب) جمله چند دنباله برابر ۷ می‌باشد.

ج) این دنباله چند جمله صحیح دارد.

د) دنباله به چه عددی نزدیک می‌شود.

به چه عددی نزدیک می‌شود؟

دنباله حسابی:

هر دنباله به فرم $a, a+d, a+2d, \dots$ را دنباله حسابی گوئیم.

لذا $a_n = a + (n-1)d$ که d قدر نسبت است، (اختلاف جمله از جمله‌ی قبل $d =$)

مسئله: ثابت کنید در دنباله حسابی مجموعه n جمله از فرمول زیر بدست می‌آید.

$$S_n = \frac{n(2n + (n-1)d)}{2}$$

فرمولهای دنباله حسابی

$$۱) a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$۲) a_n - a_m = (n - m)d$$

$$۳) n = \frac{a_n - a}{d} + ۱$$

$$۴) \frac{a_{m+n}}{2} = \frac{a_m + a_n}{2}$$

مسائل:

(۱) اگر به قدر نسبت یک دنباله حسابی ۲ واحد اضافه کنید به مجموع ۱۰ جمله آن چند واحد اضافه می‌شود؟

(۲) در دنباله حسابی $a_{15} = ۱۰$ مجموع ۲۹ جمله اول را بیابید؟

۳

(اگر $a_{20} = ۱۰۰ \cdot a_4 = ۱۰$)

الف) a_{12} را بیابید؟

ب) S_{23} را بیابید؟

۴) مجموع همه اعداد طبیعی مضرب ۷ و کمتر از ۱۰۰۰ را بیابید؟

۵) اگر $a_5 = -19$ و $a_1 = 31$ مقدار S_7 را بیابید؟

۶) ثابت کنید $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

۷) محاسبه کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$.

۸) اگر $S_n = n^2 + 3n$ مجموع جملات دنباله حسابی باشد a_1 را بیابید؟

۹) تمرین ۳ ص ۴۴

دنباله هندسی:

هر دنباله به فرم a, aq, aq^2, \dots را دنباله هندسی گوئیم.

لذا $a_n = aq^{n-1}$ که q قدر نسبت است.

$$q = \frac{\text{جمله}}{\text{جمله قبلی}}$$

$$۱) S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

$$۲) -1 < q < 1 \Rightarrow \text{حد مجموع} = S_\infty = S = \frac{a}{1-q}$$

$$۳) a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$۴) \frac{a_{m+n}}{r} = \sqrt{a_n \times a_m}$$

اثبات:

مسائل:

(۱) در دنباله هندسی $S_6 = \frac{19}{27} S_3$ قدر نسبت را بیابید.

(۲) مابین ۲ و $16\sqrt{2}$ شش عدد قرار می‌دهیم تا دنباله هندسی تشکیل دهند مجموع این ۶ عدد را بیابید.

(۳) حد مجموع دنباله $\dots, \frac{-4}{3}, 12, 4$ را بیابید.

(۴) اگر $1 < x < 0$ معادله $1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{x}$ را حل کنید.

(۵) حاصل $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$ کدام است؟

(۶) عدد اعشاری $0.333\dots$ را به کسر تبدیل کنید.

(۷) حد مجموع یک دنباله هندسی برابر ۸ می باشد و مجموع مربعات جملات آن دنباله $\frac{64}{3}$ می باشد. جمله اول را بیابید.

(۸) ثابت کنید.

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

(۹) فرمول تجزیه $x^n + 1$ را نوشته و عبارات زیر را تجزیه کنید؟

الف) $x^5 - 1 =$

ب) $x^5 + 1 =$

(۱۰) حاصل $(1 - x + x^2 - \dots + x^8)(1 + x + x^2 + \dots + x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ را بیابید.

(۱۱) (تمرین ۷ ص ۴۵)

دنباله صعودی - نزولی - کراندار

تعریف: اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ می‌گوییم دنباله a_n به l همگراست و اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ و یا حد موجود نباشد دنباله را واگرا می‌گوییم.

مسئله: معین کنید دنباله‌های زیر به چه عددی همگرا هستند؟

$$۱) a_n = \frac{۲n+۱}{۳n+۲}$$

$$۲) a_n = n \sin \frac{1}{n}$$

$$۳) a_n = \frac{\sin n}{n}$$

$$۴) a_n = ۲n - \sqrt{۴n^۲ + ۶n + ۱}$$

$$۵) a_n = \frac{n^۲}{۲^n}$$

$$۶) a_n = \frac{1}{1 - \left[\frac{-1}{n}\right]}$$

$$۷) a_n = (۲^n + ۴^n)(۲^{-n} + ۴^{-n})$$

$$۸) a_n = \frac{۲^۳n+۲+۸^{n+۱}}{۲^۳n+۱+۸^n}$$

$$۹) a_n = \frac{n^۲}{n-۳} - \frac{n^۲}{n+۳}$$

$$۱۰) a_n = \frac{2n + \sqrt{9n^2 + 1}}{3n - \sqrt{16n^2 + 1}}$$

تعریف: دنباله a_n را از بالا کراندار گوئیم هرگاه عددی مانند k موجود باشد که $a_n \leq k$ و a_n را از پایین کراندار گوئیم هرگاه عددی مانند l موجود باشد که $l \leq a_n$ و هر دنباله که هم از بالا کراندار باشد و هم از پایین آنرا دنباله کراندار گوئیم.

به عبارتی دنباله a_n کراندار است هرگاه عددی مانند M باشد که $|a_n| \leq M$

مسائل:

- (۱) دو دنباله بنویسید که کراندار باشند.
- (۲) دنباله بنویسید که کران بالا داشته باشد ولی از پایین کراندار نباشد.
- (۳) دنباله‌ای بنویسید که کران بالا داشته باشد ولی از پایین کراندار نباشد.
- (۴) دنباله ای بنویسید که کراندار نباشد.

نکته:

- (۱) هر دنباله همگرا حتماً کراندار است.
 - (۲) دنباله‌های کراندار لزوماً همگرا نیستند. مثلاً:
 - (۳) اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ دنباله کران بالا ندارد و اگر حد $-\infty$ شود دنباله کران پایین ندارد.
- تعریف:** دنباله a_n را صعودی گوئیم هرگاه $a_n \leq a_{n+1}$ و صعودی اکیداً هرگاه $a_n < a_{n+1}$
- تعریف:** دنباله a_n را نزولی گوئیم هرگاه $a_n \geq a_{n+1}$ و نزولی اکیداً گوئیم هرگاه $a_n > a_{n+1}$
- تعریف:** هر دنباله که صعودی و یا هر دنباله نزولی را یکنوا گوئیم.

نکته: هر دنباله یکنوا و کراندار حتماً همگراست.

مسائل:

معین کنید کدام دنباله صعودی است و کدام نزولی؟

$$۱) a_n = \cos \frac{n\pi}{2}$$

$$۲) a_n = (-1)^n a_n = (-1)^n$$

$$۳) a_n = \frac{n^r}{r^n}$$

$$۴) a_n = \frac{1}{n^{r+1}}$$

۵) در دنباله‌ای $a_1 = a_2 = 1$ و $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ده جمله دنباله را بنویسید و معین کنید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = ?$$

۶) چهار عدد a و x و b و x دنباله حسابی هستند. مقدار $\frac{a}{b}$ را بیابید.

۷) دنباله $a_n = (k + 2)^n$ همگرا می‌باشد. حدود k را بیابید.

$$a_n = \begin{cases} \left\lfloor \frac{kn+7}{n+2} \right\rfloor & n \text{ زوج} \\ \left\lfloor \frac{3n+1}{n+2} \right\rfloor & n \text{ فرد} \end{cases} \quad (8) \text{ دنباله}$$

همگرا است. k را محاسبه کنید.

(9) در دنباله $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ اگر $|a_n - 1| < 0.002$ کمترین مقدار n را بیابید.

(10) حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} + 4^n}{6^n}$ را بیابید.

تابع نمایی و لگاریتم

معرفی عدد نپر (e):

می دانیم که 1^∞ مبهم است لذا:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

مبهم است ثابت می شود که جملات دنباله $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ به عدد گنگ که تقریباً برابر $2/7$ می باشد نزدیک می شود

آن عدد را به e نشان می دهیم.

نکته: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{g(x)(f(x)-1)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{4n}$$

مثال: محاسبه کنید.

نمودار توابع زیر را رسم کنید، سپس معکوس این توابع را رسم کنید و صعودی نزولی را معین کنید.

الف) $y = 2^x$

ب) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

ج) $y = e^x$

نکته: \log_e^x را لگاریتم طبیعی گوئیم و به \ln نشان می‌دهیم.

معرفی و خواص \log

۱) $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$

۲) $y = \log_r u \Rightarrow d = \{x: u > \cdot\} \cap \{x: r > \cdot, r \neq 1\}$

۳) $\log a + \log b = \log ab$

۴) $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$

۵) $\log a^n = n \log a$

۶) $\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a$

۷) $\log 1 = \cdot$

$$۸) \log \frac{1}{a} = -\log a$$

$$۹) [\log x] = n \Rightarrow x \text{ دارای } n + ۱ \text{ رقم است}$$

$$۱۰) \Rightarrow \log x > \log y \quad \begin{matrix} x > y \\ a > ۱ \end{matrix}$$

$$۱۱) \Rightarrow \log x < \log y \quad \begin{matrix} x > y \\ ۰ < a < ۱ \end{matrix}$$

$$۱۲) a^{\log_a b} = b$$

$$۱۳) \log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a \log_b a \times \log_c b = \log_c a$$

$$۱۴) \log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

$$۱۵) \log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$$

$$۱۶) a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

مسائل:

۱) فاصله نقطه برخورد تابع $y = \log_2 x$ با محور x ها و برخورد معکوس این تابع با محور y ها را معین کنید؟

۲) اگر $4^x = 2\sqrt{2}$ حاصل $\log_4(4x + 1)$ را بیابید؟

۳) هرگاه $\log_2 = a$ حاصل لگاریتم های زیر را معین کنید؟
 $\log_3 = b$

الف) $\log 5$

ب) $\log \cdot / ۷۵$

ج) $\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2 \log(1 + \sqrt{5})$

۴) اگر α, β ریشه‌های معادله $10x^2 - 100x + 1 = 0$ باشد حاصل $\log \alpha + \log \beta - \log(\alpha + \beta)$ را بیابید؟

۵) حاصل $\log_2 \frac{8}{9} + \log_2 \frac{9}{10} + \dots + \log_2 \frac{63}{64}$ را بیابید.

۶) اگر $x = \log_{12} 3$ مقدار $\log_3 2$ را بر حسب x بیابید.

۷) می‌دانید $\log 2 = 0.301$ چند رقمی است؟

۸) معادلات زیر را حل کنید؟

$$۱) \ln(2x + 3) - \ln(x - 2) = 2 \ln 6$$

$$۲) \ln(2x - 2) + \ln(x - 4) = 2 \ln 2$$

$$۳) |e^x - 1| = |3 - 2e^x|$$

$$۴) \begin{cases} e^{x+1} \times e^{y-2} = 2 \\ \ln x + \ln y = \ln(x-1) + \ln(y+1) \end{cases}$$

$$۵) \frac{6^2 x - 2}{3x + 1} = 12x - 2$$

۹) در دستگاه معادلات $\begin{cases} x^2 + y^2 = 46 \\ \log_3 x + \log_3 y = 2 \end{cases}$ لگاریتم $y + x$ را در پایه ۴ بیابید.

۱۰) معادله زیر را حل کنید.

$$\log(3x - 2) = \begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix}$$

۱۱) اگر $A = (1 + 2)(1 + 2^2)(1 + 2^3) \dots (1 + 2^{32})$ حاصل $\log_2(A + 1)$ را بیابید.

۱۲) حاصل $\log(\tan 1) + \log(\tan 2) + \dots + \log(\tan 99)$ را بیابید.

۱۳) تمرین ۳ (ص ۵۷)

۱۴) تمرین ۴ (ص ۵۷)

۱۵) تمرین ۵ (ص ۵۸)

مسائل:

(۱) اگر $0 < \sin \alpha < \tan \alpha$ کمان α در کدام ناحیه است؟

(۲) اگر $\tan \alpha = 2$ حاصل $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)}$ کدام است؟

(۳) اگر α در ناحیه دوم باشد حاصل $\sqrt{\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha}}$ بیابید؟

(۴) اگر $x = \frac{2}{\sin \alpha}$ و $y = 3 \cot \alpha$ مقدار $9x^2$ را بر حسب y بیابید؟

(۵) هرگاه $\sin x = \frac{3}{5}$ و x حاده باشد حاصل $\tan(\frac{\pi}{2} + 2x)$ را بیابید؟

(۶) حاصل $\tan 12^\circ + \tan 33^\circ + \tan 12^\circ \times \tan 33^\circ$ را بیابید؟

۷) اگر $\tan(a+b) = \frac{2}{5}$ و $\tan(a-b) = \frac{3}{7}$ حاصل $\tan 2a$ کدام است؟

۸) مقدار $\cos^4 \frac{4\pi}{2} - \sin^4 \frac{\pi}{12}$ را بیابید.

۹) حاصل $\frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$ را بر حسب ده درجه بنویسید.

۱۰) هرگاه $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$ حاصل $\tan x + \cot x$ را معین کنید.

معادله مثلثاتی:

$$1) \sin x = a = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$۲) \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$3) \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$4) \cos x = a = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

$$۵) \tan x = a = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$۶) \cot x = a = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

معادلات زیر را حل کنید.

$$1) 2\sin x - 1 = 0$$

$$2) 2\cos x + \sqrt{3} = 0$$

$$3) \cos x - \cos^3 x = 0$$

$$4) \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$5) \sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x = 1$$

$$6) 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$$

$$7) \tan x = 3\cot x$$

$$8) \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$$

$$9) \sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$$

$$10) \tan x - 3\cot x = \cdot$$

$$1) 2\cos^2 x = \sin x - 1$$

$$2) \sin 2x + \sin 3x = 0$$

مسئله: معادله $\tan x + \cot x = k$ دارای جواب است حدود k را بیابید؟

مسائل:

(۱) در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله اول ۳۱ و حاصل ضرب آنها ۱۲۵ می باشد. قدر نسبت را بیابید.

(۲) حاصل ضرب ۹۱ جمله اول دنباله هندسی 3^{182} می باشد حاصل ضرب جمله اول در جمله نود و یکم چند است؟

(۳) حاصل $1 + 11 + 111 + \dots + \overbrace{111 \dots 1}^{10 \text{ تا}}$ را بیابید.

(۴) تویی از بالای برج به زمین می افتد پس از برخورد با زمین $0/4$ ارتفاع قبلی بالا می آید. اگر کل مسافتی که توپ طی می کند تا بایستد ۲۱۰ متر باشد ارتفاع برج را بیابید.

(۵) در دنباله هندسی هر جمله برابر حد مجموع بقیه جملات است. قدر نسبت را بیابید.

(۶) معادله درجه دویی بنویسید که ریشه های آن $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ و $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ باشد.

(۷) اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند حاصل $\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha}$ را بیابید.

(۸) اگر α و β ریشه های $x^2 + (1 - 3x)x - 1 = 0$ باشند و α و k و β سه جمله دنباله عددی باشند ریشه بزرگ تر معادله را بیابید.

(۹) در معادله $4x^2 + 3x - 4 = 0$ حاصل $\frac{\alpha^4 + 1}{\alpha^2}$ را بیابید.

(۱۰) برد تابع $f(x) = \begin{cases} 3^x & x \leq 0 \\ \log x & 0 < x < 1 \end{cases}$ را بیابید.

(۱۱) نمودار $y = |\sqrt{|x|} - 1|$ را رسم کنید.

(۱۲) در تابع $f(x) = x + 2$ حاصل $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{1394}(1)$ را بیابید.

(۱۳) تابع f صعودی است و $f(k^2 - 1) - f(k + 1)$ عددی منفی است حدود k را بیابید.

(۱۴) اگر $f = \{(3, 4)(4, -3)(-3, 2)(1, -4)\}$ تابع $f \circ f^{-1}$ را بنویسید.

(۱۵) دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{5-[x]}{[x]-2}}$ را معین کنید.

(۱۶) حاصل $\frac{1}{\log_2 3 + 1} + \frac{1}{\log_3 2 + 1}$ را بیابید.

(۱۷) حاصل $\left[\log \frac{1}{345}\right] + [\log_2 85] + \left[\frac{\sin 99^\circ}{5}\right]$ را بیابید.

(۱۸) اگر $\log_3 2 = a$ حاصل $\frac{\log 81}{\log 16}$ را بر حسب a بنویسید.

(۱۹) حاصل $\log \frac{1}{14} \times \log \frac{2}{14} \times \dots \times \log \frac{27}{14}$ را بیابید.

(۲۰) حاصل $\frac{\ln \sqrt{27} + \ln \sqrt{8} - \ln \sqrt{125}}{\ln 6 - \ln 5}$ را بیابید.

(۲۱) اگر α و β ریشه های معادله $\tan^2 x - 2x \tan x + k - 1 = 0$ باشند و $\alpha + \beta = \frac{3x}{4}$ مقدار k را بیابید.

(۲۲) اگر $\tan x$ و $\cot x$ ریشه های معادله $y^2 + by + b - 2 = 0$ باشند حاصل $\frac{1}{\sin x \cos x}$ را بیابید.

(۲۳) هرگاه $\sin \frac{x}{2} = a$ ثابت کنید $\log(3 - 4 \cos x + \cos 2x) = 4x + 3 \log 2$

تعریف: اگر تابع $y = f(x)$ در $x = a$ پیوسته باشد آنگاه

$$f'(a) =$$

و یا

$$f'(a) =$$

مثال: مشتق تابع $f(x) = x^3$ در $x = 2$ به کمک تعریف بنویسید.

تعریف:

$$f'(x) =$$

مثال: به کمک تعریف مشتق، مشتق توابع زیر را معین کنید.

$$1) f(x) = x^3$$

$$2) f(x) = \sqrt{x}$$

فرمول‌های مشتق‌گیری:

$$1) y = \sin^2 \sqrt{x} + \cos^2 \sqrt{x} \Rightarrow y' =$$

$$2) y = x^3 + 4x^2 + 7x + 5 \Rightarrow y' =$$

$$3) y = \frac{3+5x}{2x-1} \Rightarrow y' =$$

$$4) y = \sqrt{x^2 + 3x} \Rightarrow y' = \dots$$

$$5) y = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y' =$$

$$6) y = e^x \Rightarrow y' =$$

$$7) y = e^{\sin x} \Rightarrow y' =$$

$$8) y = \sin(e^x) \Rightarrow y' =$$

$$9) y = \sqrt{e^{\sqrt{x}} + 3x} \Rightarrow y' =$$

$$10) y = \frac{x + e^{x^2}}{2x + \tan x} \Rightarrow y' =$$

$$11) y = \ln(\sin x) \Rightarrow y' =$$

$$12) y = \ln(x^2 + \sqrt{x}) \Rightarrow y' =$$

$$13) y = \tan\left(\sqrt{x} + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow y' =$$

$$14) y = \cot(x \ln x) \Rightarrow y' =$$

$$15) x^3 + 2xy - y^2 = 0 \Rightarrow y' =$$

$$17) xe^{xy} + \sin(xy) + \sqrt{x^2 y} + 4 = 0 \Rightarrow y' =$$

$$18) x^3 + y^3 - 2xy^2 + 4y^3 + e^x = 0 \Rightarrow y' = \dots$$

نکته: یک تابع را ابتدا ساده کرده سپس مشتق بگیرید.

(۱) مشتق تابع $y = \frac{x\sqrt{x+5} + \sqrt{x}(x+5)}{\sqrt{x^2+5x}}$ در $x=4$ را بیابید.

(۲) مشتق تابع $y = \sin 2x \cos 3x + \cos 2x \sin 3x$ در $x = \frac{\pi}{5}$ را بیابید.

(۳) اگر $f(x) = \sin(3x - f(x))$ مقدار $f'(0)$ را بیابید.

(۴) اگر $f'(-1) = 2$ مقدار مشتق $y = f\left(\frac{2}{x}\right)$ در $x = -2$ را بیابید.

(۵) اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + \sin x}$ و $y(x) = \frac{x^2 + \sin^2 x + 2x \sin x}{x + 1}$ مقدار $2ff'g + g'f^2$ به ازای $x=1$ را بیابید.

نکته: اگر $h(a) = 0, f(x) = h(x)g(x)$ آنگاه

$$f'(a) = h'(a)g(a)$$

مسائل:

(۱) اگر $f(x) = x(x-1)\dots(x-9)$ مقدار $f'(1)$ بیابید؟

(۲) اگر $f(x) = \frac{1-tg2x}{1+tg2x}$ مقدار $f'(\frac{\pi}{8})$ بیابید؟

(۳) هرگاه $f(x) = \frac{(x-1)h(x)}{x^2h(2x-1)}$ مقدار $f'(1)$ کدام است؟

(۴) اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$ حاصل $f'g + g'f$ در $x=1$ بیابید؟

(۵) مقدار مشتق $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x$ در $x = \frac{\pi}{4}$ بیابید؟

(۶) شیب خط مماس بر منحنی $3\sqrt{\frac{x}{y}} + 3\sqrt{\frac{y}{x}} = 2$ در $x=1$ بیابید؟

(۷) اگر $f(a) = \frac{1}{r}$ و $f'(a) = 2$ مقدار مشتق $f^2(x) + \frac{1}{f(x)}$ در $x=a$ کدام است؟

۸) اگر $f(x) = 0$ معادله درجه دو با ریشه های α و β باشد. حاصل $f'(\alpha) + f'(\beta)$ را بیابید.

کاربرد مشتق:

قاعده هوییتال

حدود زیر را محاسبه کنید

$$۱) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{x+6}}{x^2 - 9}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$$

آهنگ تغییر:

خط مماس و خط قائم از نقطه روی منحنی:

مسائل:

(۱) مشتق توابع را بنویسید.

$$1) y = xe^{x^2-1}$$

$$2) y = e^{2x} + e^{-x} + 2$$

$$3) y = \ln(1 + \cos^2 x)$$

$$4) y = \sqrt{\sin \sqrt{\sin x \sqrt{\dots}}}$$

$$5) y = \ln(\ln x)$$

$$6) y = \cos(x - y)$$

$$7) x \sin y + y \cos x = 1$$

(۲) معادله خط مماس بر تابع $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ در نقطه به طول ۴ را بیابید.

(۳) در چه نقطه ای از منحنی $x + \sqrt{xy} + y = 1$ خط مماس، موازی محور x هاست.

۴) اگر $8y^2 - 2xy^2 + 16 = 0$ آهنگ تغییر لحظه ای y نسبت به x در نقطه (۲ و ۳) بنویسید؟

۵) در تابع $y = \sqrt{x}$ آهنگ متوسط تابع روی بازه $[۲/۲۵, ۶/۲۵]$ از آهنگ آنی در شروع بازه چقدر کمتر است؟

۶) در تابع $y = \sqrt{x}$ آهنگ متوسط در بازه $[۴, ۲۵]$ برابر آهنگ لحظه ای در کدام نقطه است؟

۷) معادله پرتاب توپ به صورت $S = ۵t^2 + ۲۰t$ می باشد سرعت لحظه ای در زمان برخورد با زمین بیابید.

۸) معادله $x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + ۳۰t$ مربوط به ماشینی است که ناگهان ترمز می کند.

الف) ماشین بعد از ترمز چند ثانیه و چند متر حرکت می کند؟

ب) سرعت ماشین در لحظه ترمز چند است؟

۹) نقطه M روی منحنی $y = \sqrt{x+۸}$ در حرکت است اگر T فاصله M تا مبدأ باشد آهنگ تغییر T در نقطه $x = ۷$

بیابید.

۱۰) عرض از مبدأ خط قائم بر تابع $y = \frac{2x-1}{x+1}$ در نقطه تقاطع با محور طولها را بیابید.

۱۱) از رابطه $y = \sin(x - 2y) + \sqrt{x - y}$ مقدار مشتق در نقطه (۱ و ۲) کدام است؟

۱۲) ثابت کنید خط $y = 2$ بر تابع $f(x) = x + \frac{1}{x}$ مماس است.

مشتق راست:

مشتق چپ:

نکته: تابع $y = f(x)$ در $x = a$ مشتق پذیر است.

هرگاه تابع اولاً پیوسته باشد ثانیاً مشتق چپ و راست مساوی باشد.

مسائل:

۱) تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & x \geq 2 \\ x^3 & x < 2 \end{cases}$ در $x = 2$ مشتق پذیر است. a , b را بیابید؟

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 1 \\ x^2+1 & x < 1 \end{cases} \text{ (۲) در تابع}$$

الف) $f'_-(1)$ را بیابید.

ب) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h^2) - f(1)}{h^2}$ را بیابید.

نکته: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+mh) - f(x+nh)}{kh} = \frac{m-n}{k} f'(x)$

مسائل:

(۱) اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+3h) - f(4-2h)}{10h} = 5$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x^2 - 16}$ را بیابید.

(۲) هرگاه آهنگ تغییر $y = f(x)$ در $x = 2$ برابر ۱۰ باشد. حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - f(x-2h)}{5h}$ را بیابید.

(۳) در تابع $f(x) = |x-2| + \sqrt{2x}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2h) - f(2)}{h}$ را بیابید.

۴) با استفاده از تعریف مشتق $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}}$ را بیابید.

۵) اگر $f(x) = \sin \pi x^2$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ را بیابید.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{3h}$$

۶) هرگاه $f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & x > 1 \\ x^2 - 2x & x < 1 \end{cases}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{3h}$ را بیابید؟